7 класс

№1. Решите числовой ребус

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & * & 9 \\ & \times & & & \\ & & & * & * \\ \hline & & * & 5 & * \\ + & & & & \\ * & * & * & * & \\ \hline * & * & * & 0 & 6 \end{array}$$

Решение:

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & 3 & 9 \\ & \times & & & \\ & & & 5 & 4 \\ \hline & & 9 & 5 & 6 \\ + & & & & \\ 1 & 1 & 9 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 9 & 0 & 6 \end{array}$$

№2. Теплоход проходит путь от A до B по течению за 3 часа, а возвращается обратно за 4 часа. За какое время путь от A до B преодолеет плот?

Решение:

Пусть v км/ч – собственная скорость теплохода, а x км/ч – скорость течения реки, тогда имеем $(v+x)\cdot 3 = (v-x)\cdot 4$, $v = 7x$. Время за которое плот преодолеет путь от A до B равно $\frac{(7x + x)\cdot 3}{x} = 24$.

Ответ: 24 часа.

№3. Отец и сын решили перемерить шагами расстояние между двумя деревьями, для чего отошли одновременно от одного и того же дерева. Длина шага отца – 70 см, сына – 56 см. Найти расстояние между этими деревьями, если известно, что следы их совпали 10 раз.

Решение:

НОК(70;56) = 280

$280\cdot 10=2800$ см

Ответ: 28 м

№4. Разрежьте букву Е, изображенную на рис. 1, на пять частей и сложите из них квадрат. Части переворачивать обратной стороной не разрешается.

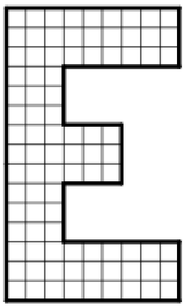
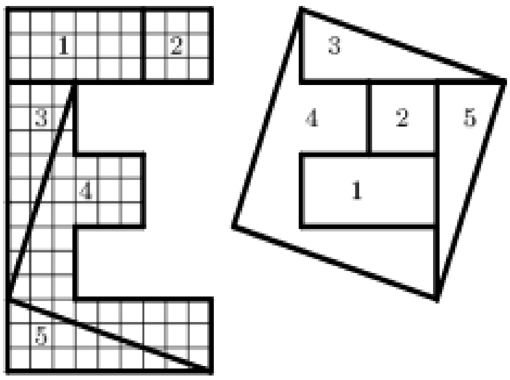


рис.1

Решение:



№5. На выпускном балу каждый юноша танцевал по крайней мере с одной девушкой, но никто из юношей не танцевал со всеми девушками, а каждая девушка танцевала по крайней мере с одним юношей, но никто из девушек не танцевал со всеми юношами. Докажите, что среди присутствовавших на балу можно найти двух юношей и двух девушек так, что каждый из двух юношей танцевал лишь с одной из двух девушек, а каждая из этих двух девушек танцевала лишь с одним из этих двух юношей.

Решение:

Рассмотрим юношу, который танцевал с наибольшим количеством девушек (если таких несколько, то любого из них). Пусть это Вася.

Рассмотрим девушку, с которой он не танцевал (по условию, такая есть). Пусть это Маша.

Пусть Петя - любой из молодых людей, кто танцевал с Машей. Поскольку количество девушек, с которыми танцевал Петя, не больше количества девушек, которые танцевали с Васей, то Петя танцевал не со всеми девушками, с которыми этот делал Вася. Пусть Лена - одна из них.

Вася, Петя, Маша и Лена удовлетворяют условию задачи.

Оценивание

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок либо нерассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

8 класс

№1. Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно 6 банок напитка, а одного бидона виноградного – ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

Решение:

1 способ. На банку напитка уходит 1/6 бидона яблочного и 1/10 бидона

виноградного сока, значит, объем банки равен объема бидона. После изменения рецептуры на банку напитка уходит 1/5 бидона яблочного сока и 1/x бидона виноградного сока, значит, объем банки равен

объема бидона. Получаем уравнение: .

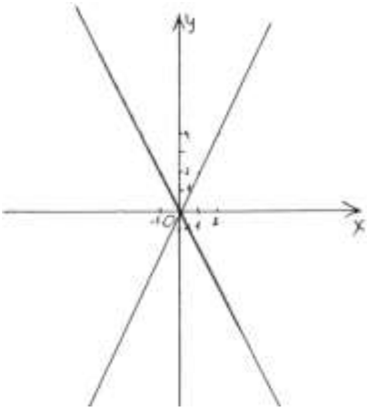
Отсюда x=15.

2 способ. На 30 банок было затрачено 5 бидонов яблочного и 3 бидона виноградного сока. Итого 8 бидонов сока. По новой рецептуре на 30 банок затратят 6 бидонов яблочного сока. Значит, виноградного сока затратят 2 бидона. Итак, бидона виноградного сока хватит на 15 банок.

Ответ: 15 банок.

№2. Постройте график уравнения $y^2 = 4x^2$.

Решение: , ($2x$-y)($2x$+y)=0 $\left[\begin{array}{l} y = 2x, \\ y = -2x. \end{array}\right.$



№3. На основании АС равнобедренного треугольника *ABC* выбрали точку *D*, а на продолжении *AC* за вершину *C* – точку *E*, причем *AD* = *CE*. Докажите, что *BD* + *BE*   *AB* + *BC*.

Доказательство:

На продолжении стороны *AB* за точку *A* отложим отрезок *AF*, равный *AB*. Треугольник *ADF* равен треугольнику *CEB* по двум сторонам и углу между ними. Значит *DF* = *BE*. Применив неравенство треугольника к треугольнику *FDB*, получим, что *AB*+*BC* = *BF*   *BD* + *DF* = *BD* + *BE*, что и требовалось доказать.

№4. Найти все натуральные числа, которые уменьшаются в 12 раз при зачеркивании последней цифры.

Решение:

Любое натуральное число, оканчивающееся на цифру b, может быть записано в виде 10a+ b, где a – некоторое натуральное число. Из условия задачи следует, что числа a и b удовлетворяют соотношению 10a + b = 12a. Из этого соотношения вытекает, что b = 2a и, значит, число b отлично от 0 и является четным. Поэтому, так как $1 \le b \le 9$, возможными значениями b являются числа 2; 4; 6; 8. Учитывая отношение b = 2a, получаем, что искомыми числами являются числа 12; 24; 36; 48.

Ответ: 12; 24; 36; 48.

№5. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге - лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги, сказали: «Мой сосед по шеренге - лжец».) Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2005 воинов?

Решение:

Заметим, что два воина, стоящие рядом, не могли оказаться рыцарями. Действительно, если бы они оба были рыцарями, то они оба сказали бы неправду. Выберем воина, стоящего слева, и разобьем ряд из оставшихся 2004 воинов на 1002 группы по два рядом стоящих воина. В каждой такой группе не более одного рыцаря, то есть среди рассматриваемых 2004 воинов не более 1002 рыцарей, то есть всего в шеренге не более 1002+1 = 1003 рыцарей.

Рассмотрим шеренгу РЛРЛР…..РЛРЛР. В такой шеренге стоит ровно 1003 рыцаря.

Ответ: 1003 рыцаря.

Оценивание

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо нерассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

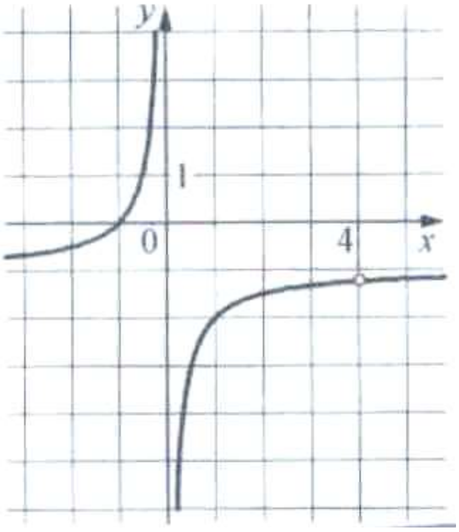
9 класс

№1. Постройте график функции $y = -1 - \frac{x-4}{x^2-4x}$.

<u>Решение:</u>

Преобразуем выражение: $y = -1 - \frac{x-4}{x^2-4x} = -1 - \frac{1}{x}$ при условии, что $x \neq 4$.

Построим график:



№2. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?

<u>Решение:</u>

Ребенок может получить либо одно, либо два, либо три имени, причем все имена различны. Всего $300+300\cdot 299 + 300\cdot 299\cdot 298$ = 26 820 600 различных имен.

<u>Ответ:</u> 26 820 600 имен.

№3. Доказать, что дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократима ни при каком *n*.

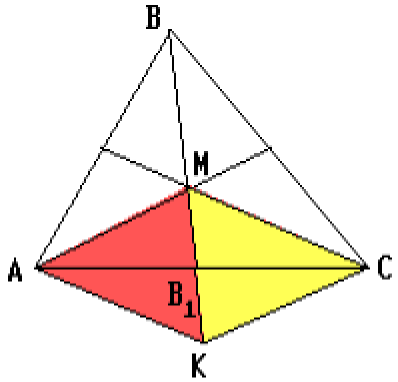
<u>Решение:</u>

Преобразуем исходную дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1} = 1 - \frac{n}{n^2+1}$.

Если сократима дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$, то сократима дробь $\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$ и сократима дробь , что неверно. Следовательно, исходная дробь несократима.

№4. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3,4 и 5.

Решение:



Пусть B_1 — середина стороны *AC* треугольника *ABC*, *M* — точка пересечения его медиан. На продолжении медианы BB_1 за точку B_1 отложим отрезок B_1K, равный MB_1. Тогда *AMCK* — параллелограмм, *CK* = *AM*.

Стороны треугольника *KMC* составляют соответствующих медиан треугольника *ABC*. Поэтому треугольник *KMC* подобен с коэффициентом треугольнику, стороны которого равны медианам треугольника *ABC*. Тогда площадь треугольника *KMC* составляет площади треугольника со сторонами 3, 4, 5, т.е. . Следовательно,

$S_{\Delta ABC} = 6 \cdot S_{\Delta} \qquad = 6 \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta KMC} = 8.$

Ответ: 8.

№5. 4 станка разной производительности производят одинаковые детали. Если работают все четыре станка, то заказ может быть выполнен за 8 часов. Если работают только 1-й, 3-й и 4-й, то необходимое время - 9,6 часа, если же работают 1-й, 2-й и 3-й – за 12 часов. За сколько часов смогли бы выполнить заказ (работая одновременно) только 1-й и 3-й станки?

Решение:

Обозначим производительности 1-го, 2-го, 3-го и 4-го станка соответственно *x*, *y*, *z*, *w*. По условию задачи

$$\begin{cases} x + y + z + w = \frac{1}{8}; \\ x + z + w = \frac{1}{9,6}; \\ x + y + z = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

Из первого вычитаем третье уравнение: *w* = Подставляя во второе уравнение найденное значение, получим *x*+*z* = . Тогда необходимое время

составит часов.

Ответ: 1 часов.

Оценивание

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо нерассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

10 класс

№1. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

<u>Решение:</u>

Выпишем гласные в данном порядке. Тогда для буквы «ф» имеем 5 мест. После того как она вписана, имеем 6 мест для буквы «ц», и наконец, 7 мест для буквы «т». Всего $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ способов.

<u>Ответ:</u> 210 способов

№2. Найти наименьшее значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе $\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2. \end{cases}$

<u>Решение:</u>

Заметим, что $2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$. Возведем обе части первого уравнения в квадрат и почленно вычтем из них обе части второго уравнения второго уравнения: (= $\Leftrightarrow xy = \frac{1}{2\left(5a^2-4a-1\right)}$.

Для того чтобы найти наименьшее значение, которое может принимать произведение xy, надо найти минимум квадратичной функции $f(a) = \frac{1}{2(5a^2-4a-1)}$. График функции $f(a)$ - парабола, ветви которой направлены вверх. Минимальное значение функция принимает в точке $a_0 = 0{,}4$, которая является абсциссой вершины параболы. Значение функции в этой точке $f(0{,}4) = -0{,}9$. Таким образом, минимальное значение, которое может принимать произведение xy – это значение -0,9. Осталось убедиться, что при $a = 0{,}4$ исходная система имеет решение.

При $a = 0{,}4$ система примет вид $\begin{cases} x+y=0{,}2 \\ xy=-0{,}9 \end{cases}$. Решая систему подстановкой, приходим к уравнению $10y^2-2y-9 = 0$. Вычислим дискриминант: $\frac{D}{4} = 1+90 = 91 > 0$. Из положительности дискриминанта заключаем, что решение системы существует; следовательно, минимальное значение произведения $xy = -0{,}9$.

<u>Ответ:</u> -0,9

№3. Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, делит основание *AC* точкой касания *D* на отрезки *a* и *b* (рис.1). Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что $\angle B = 60°$.

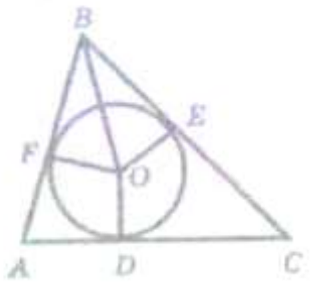


рис 1.

<u>Решение:</u>

Проведем, как обычно, радиусы *OD*, *OE*,*OF* в точки касания окружности со сторонами треугольника *ABC*. Заметим, что *AF* = *AD* = *a*, *CD* = *CE* = *b*.Кроме того, введем обозначения *OD* = *OE* = *OF* = *r*. Тогда из Δ*BOE*, где *BO* – биссектриса $\angle B$, а значит ∠OBE = 30°, находим: BE = OE· ctg30° = $r\sqrt{3}$.

Δ*ABC*: *AC* = *a*+*b*; AB = $a + r\sqrt{3}$; BC = $b + r\sqrt{3}$.

Площадь треугольника *ABC* можно выразить теперь, по крайней мере, тремя способами: по формуле Герона, по формуле $S = pr$ и, наконец, по формуле 0,5 *AB*· *BC* · *sin*60°. Выберем первые два способа – формулы, в которые входит полупериметр *p*; здесь $p = a + b + r\sqrt{3}$.

По формуле Герона $S = \sqrt{(a + b + r\sqrt{3})abr\sqrt{3}}$.   (1)

По формуле $S = pr$ имеем: $= (a + b + r\sqrt{3}) \cdot r$ (2)

Приравняв полученные выражения (1) и (2) (то есть применив метод площадей), придем к уравнению относительно неизвестной величины *r*.

Преобразуем полученное уравнение: $(a + b + r\sqrt{3})abr\sqrt{3} = (a + b + r\sqrt{3})^2 r^2$, $ab\sqrt{3} = (a + b + r\sqrt{3})$ *r*. Из равенства (2) следует что интересующая нас площадь треугольника ABC равно $ab\sqrt{3}$.

<u>Ответ:</u> $S = ab\sqrt{3}$.

№4. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс.руб под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму.

К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Решение:

Пусть S – первоначальная сумма вклада, x – искомая сумма ежегодных

дополнительных взносов, p – годовая процентная ставка, а k = соответствующий ей коэффициент ежегодного роста, n – срок хранения, R – суммарный процентный прирост вклада за все n лет хранения. В соответствии с условиями задачи сумма вклада составит через год Sk, через два года - $(Sk + x)\,k = Sk^2+xk$, через три года – $(Sk^2+xk+x)\,k = Sk^3+xk^2 + xk$, а через n лет - $Sk^n+xk^{n-1} + xk^{n-2} + \ldots + xk = Sk^n + xk\cdot\frac{k^{n-1}-1}{k-1}$.

Таким образом, приходим к линейному уравнению для неизвестной величины x: $Sk^n + xk\cdot\frac{k^{n-1}-1}{k-1} = S\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)$.

Подставляя в него заданные значения $S = 3900$; $k = 3/2$; $n = 5$; $R = 725$ находим x. $x = 210$.

Ответ: 210 тыс. руб.

№5. Докажите, что уравнение $y^2 = 5x^2+6$ не имеет решений в целых числах.

Решение:

Перепишем уравнение в виде $y^2 - x^2 = 4x^2 + 6 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 4x^2 + 6$.

Так как правая часть уравнения является четным числом, то и левая часть также должна быть четным числом. Если $(y+x)$ четно, то $(y-x)$ тоже четно, и наоборот. Следовательно, левая часть уравнения делится на 4, но правая часть на 4 не делится. Значит, уравнение не имеет решений.

Оценивание

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения

7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо нерассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

11 класс

№1. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

Решение:

Выпишем гласные в данном порядке. Тогда для буквы «ф» имеем 5 мест. После того как она вписана, имеем 6 мест для буквы «ц», и наконец, 7 мест

для буквы «т». Всего способов.

Ответ: 210 способов

№2. Решите уравнение $x^2 + 3 = 7y$ в целых числах.

Решение:

Остаток от деления на 7

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^2+3	3	4	0	5	5	0	4

Так как $7y = x^2 + 3$ делится на 7, то или $x = 7a + 2$ или $x = 7a + 5$, где

a .

При $x = 7a + 2$: $7y = 49a^2 + 28a + 4 + 3$

$y = 7a^2 + 4a + 1$

При $x = 7a + 5$: $7y = 49a^2 + 70a + 25 + 3$

$y = 7a^2 + 10a + 4$

Ответ: $(7a + 2;\ 7a^2 + 4a + 1)$; $(7a + 5;\ 7a^2 + 10a + 4)$, a .

№3. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной,

периодической с периодом 4, и на промежутке ее значения вычисляются по правилу $f(x)=1-|x-1|$. Решите уравнение

$$2 \cdot f(x) \cdot f(x-8) + 5 \cdot f(x+12) + 2 = 0$$

Решение:

Так как функция *f(x)* периодична с периодом 4, то достаточно рассмотреть ее на любом отрезке длины 4. Так как она является и не четной, то удобно рассмотреть отрезок [-2; 2].

На отрезке [0; 2] по условию функция имеет вид *f(x)*=1-$|x-1|$. Используя определение нечетной функции, продолжим *f(x)* на отрезок [-2;0]. Здесь она будет вычисляться по правилу *f(x)* = - *f(-x)* = -(1 - $|-x-1|$) = - 1 + $|x+1|$.

Итак, на отрезке [-2;2] функция имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} -1 + |x+1| & \text{при } x \epsilon [-2;\ 0], \\ 1 - |x-1| & \text{при } x \epsilon [0;\ 2]. \end{cases}$$

По условию задачи функция *f(x)* периодична с периодом 4, поэтому $f(x) = f(x-8) = f(x+12)$.

$$2 \cdot f(x) \cdot f(x-8) + 5 \cdot f(x+12) + 2 = 0$$

Уравнение упрощается:

$$2\left(f(x)\right)^2 + 5f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -2; \\ f(x) = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Рассмотрим два случая.

1-й случай: Пусть $x \in [0; 2]$; тогда

$$\left[\begin{array}{l} 1 - |x-1| = -2; \\ 1 - |x-1| = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 > 2; \\ x = -2 < 0; \\ x = -\frac{1}{2} < 0; \\ x = \frac{5}{2} > 2. \end{array}\right. \Rightarrow \varnothing.$$

2-й случай: Пусть $x \in$ [-2; 0]; тогда

$$\left[\begin{array}{l} -1 + |x+1| = -2; \\ -1 + |x+1| = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2}; \\ x = -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

С учетом периодичности получаем ответ: $x = -\frac{1}{2} + 4k, k\epsilon Z$ или $x = -\frac{3}{2} + 4n, \quad n\epsilon Z$.

Ответ: .

№4. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение:

Функция $y = \arcsin(\sin x)$ является периодической, с основным периодом 2π . Это значит, что для начала можно ограничиться построением графика функции на любом промежутке длины 2π . Выберем отрезок [-$\pi;\pi$]. Далее заметим, что функция $y = \arcsin(\sin x)$ является нечетной. Поскольку функция является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат, в частности на отрезке [-$\pi;\pi$]. Поэтому, построив график

функции на отрезке [0], мы с помощью симметрии сможем построить и график функции на отрезке [-π; 0].

Рассмотрим функцию $y = \arcsin(\sin x)$ на отрезке [0]. По определению арксинуса эта запись означает $\sin y = \sin x$, где $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а $x \in [0;\pi]$.
Рассуждения проведем по отдельности в двух частях: 1) $x \in [0;\pi/2]$; 2) $x \in (\pi/2; \pi]$.

1) Если $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, то, поскольку $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, из равенства $\sin y = \sin x$ следует равенство $y = x$ - в силу монотонности функции $S = \sin t$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Если , то воспользуемся тем, что $\sin(\pi - x) = \sin x$. Значит, $\sin(\pi - x) = \sin(\pi + (-x)) = -sin(-x) = \sin x$.

Если , . Но тогда из равенства $\sin y = \sin(\pi - x)$ следует равенство $y = (\pi - x)$.

Функция $y = \arcsin(\sin x)$, $x \in [0;\pi]$ тождественна кусочной функции $y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$. График этой функции изображен на рис.1.

На рисунке 2 представлен график функции $y = \arcsin(\sin x)$, .

На рисунке 3 представлен весь график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

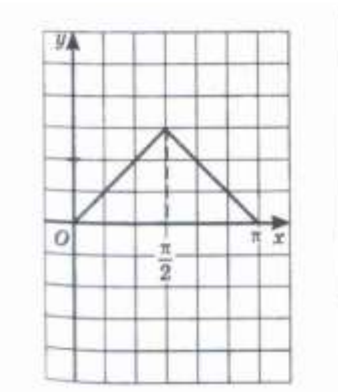


рис.1

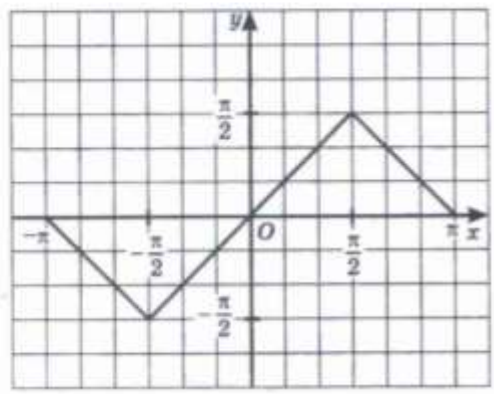


рис. 2

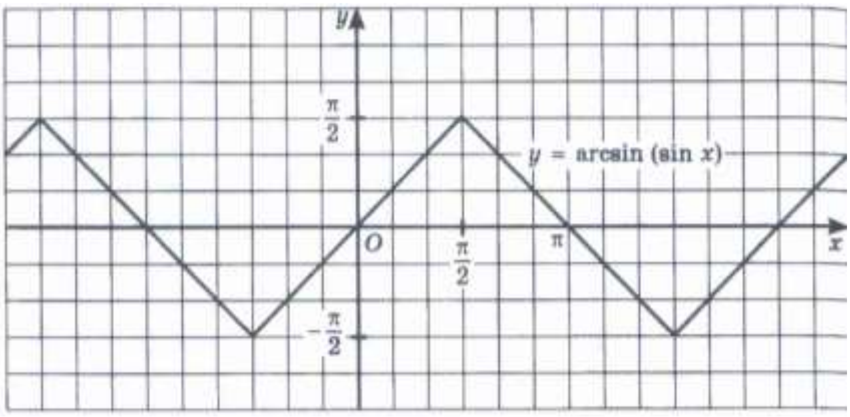
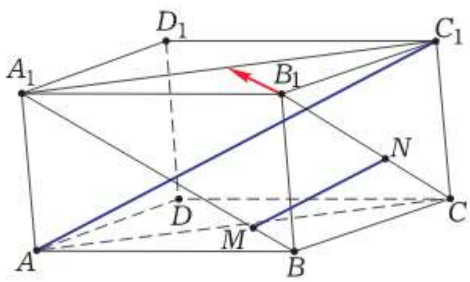


рис. 3.



№5. На диагоналях A_1B и B_1C боковых граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки M и N, так что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда AC_1. Найдите отношение длин этих отрезков.

<u>Решение:</u>

Посмотрим на параллелепипед «вдоль» диагонали B_1D_1 (рис. 4).

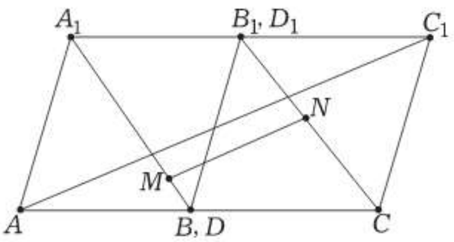


рис. 4

Образы вершин B и D совпадут с серединой AC, аналогично образы вершин B_1 и D_1 совпадут с серединой A_1C_1. При параллельном проектировании образами параллельных прямых являются параллельные прямые, и к тому же отношения отрезков, расположенных на параллельных прямых, сохраняются. Поэтому образы диагоналей A_1B и B_1C разделят образ AC на три равных отрезка, средний из которых будет равен образу MN. Поэтому MN: A_1C = 1:3.

<u>Ответ:</u> MN: A_1C = 1:3.

Оценивание

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.

6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо нерассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.